Vertices of summands of the reduced Lefschetz module and subgroup complexes (Algebraic Combinatorics)

AUTHOR(S):

澤辺, 正人

数理解析研究所講究録 1440 巻 2005 年 125-126

Vertices of summands of the reduced Lefschetz module and subgroup complexes

鳴門教育大学・数学教育講座　澤辺 正人 (Masato Sawabe)
Department of Mathematics, Naruto University of Education

ここで報告する内容の詳細および研究の背景については、報告集 [3] 又は論文 [1, 2] の中で既に述べられている。詳しくはそれらを参照されたい。

G を有限群、p を G の位数を割り切る素数、$\mathcal{B}_p(G)$ を G の 非自明な p-radical 部分群全体の集合; つまり $O_p(N_G(U))=U$ を満足するような G の非自明な p-部分群 U 全体の集合とする。さらに $\mathcal{C}_p(G)$ を $Z(U)\in Syl_p(C_G(U))$ を満足するような G の非自明な p-部分群 U 全体の集合とし $\mathcal{B}_p^{cen}(G):=\mathcal{B}_p(G)\cap\mathcal{C}_p(G)$ と置く。$\mathcal{C}_p(G)$ に属する部分群を "p-centric", $\mathcal{B}_p^{cen}(G)$ に属する部分群を "centric p-radical" と呼ぶ。また $\Delta(\mathcal{B}_p^{cen}(G))$ は半順序集合 $(\mathcal{B}_p^{cen}(G),\subseteq)$ に付随する単体複体を意味するものとする。

Proposition (a part of Proposition 9 in [2]) *Let V be a non-centric p-radical subgroup of G of maximal order, and let p^n and p^d, respectively, the p-part of the order of G and the order of V. Then the following holds:*

1. *Any non-trivial p-subgroup Q of G such that $|Q|>|V|$ cannot be a vertex of an indecomposable summand of the reduced Lefschetz module $\tilde{L}_G(\Delta(\mathcal{B}_p^{cen}(G)))$.*

2. *The p-part of the reduced Euler characteristic $\tilde{\chi}(\Delta(\mathcal{B}_p^{cen}(G)))$ is divisible by p^{n-d}.*

ここで経験から得られる我々の“感覚”は「V の位数は G の p-Sylow 部分群のそれと較べて極めて小さい」と言うものである。即ち $\tilde{L}_G(\Delta(\mathcal{B}_p^{cen}(G)))$ の直既約因子の vertex は極めて制限されてしまうのである。さらに上の (2) はオイラー標数の p-部分の大きさについての下限を与えている。この結果は (1) の系として導かれるが、実際にこの下限を最良とするような有限群が存在する。例えば M をモンスター単純群とすると $\Delta(\mathcal{B}_2^{cen}(M))$ のオイラー標数は次のようになる (cf. [2, Appendix]).

$$\tilde{\chi}(\Delta(\mathcal{B}_2^{cen}(M)))=2^{42}\cdot(73,427,837,341,156,925,816,952,881)$$

さらに M の non-centric 2-radical の中で最大位数のものは semi-dihedral group SD_{16} であり位数は 2^4 である ($\mathcal{B}_2(M)$, $\mathcal{B}_2^{cen}(M)$ については [4] を参照)。$|M|$ の 2-部分は 2^{46} であることから、先の (2) より $\tilde{\chi}(\Delta(\mathcal{B}_2^{cen}(M)))$ の 2-部分は少なくとも $2^{46-4}=2^{42}$ で割り切れることが保証されている。しかしながら下限である 2^{42} がまさに $\tilde{\chi}(\Delta(\mathcal{B}_2^{cen}(M)))$ の 2-部分を与えているのである。また上の Proposition は適当な仮定の下でさらに一般化された形で証明される。詳しくは [2] を参照されたい。

さて今回の結果と今までに得られた具体例などから次のような定理を個人的に期待している。

Expected ?? *Under some "geometric condition" on a p-subgroup complex* $\Delta(\mathcal{P})$, *there exists (say something like) a "BAD" p-subgroup* D *of* G *such that*

1. D *is a defect group of a non-principal p-block* B *of* G (?)
2. *There exists an indecomposable summand* M *of* $\tilde{L}_G(\Delta(\mathcal{P}))$ *with vertx* Q, *and further* M *lies in* B (?)
3. *The p-part* $\tilde{\chi}(\Delta(\mathcal{P}))_p$ *is given by just* $|G|_p/|D|$ (?)

References

[1] M. Sawabe, On the reduced Lefschetz module and the centric p-radical subgroups, to appear in *Tokyo J. Math.*.

[2] M. Sawabe, 同上 II, preprint.

[3] 澤辺 正人, The p-radical subgroups and the relative projectivity, 数理研講究録「有限単純群の研究とその周辺」**1407**, 51–59.

[4] S. Yoshiara, Radical 2-subgroups of the Monster and Baby Monster, preprint.